

IV. *Principia Dynamica, sive Principia Mechanices Metaphysica; Auctore Jacobo Jurin, M. D. R. S. S.*

*Presented at a Meeting of
the Royal Society, March
13. 1746.*

CUM vir illustris G. G. Leib-
nitius novam suam senten-
tiam, qua vim corporis in
motu constituti quadrato velocitatis metiendam statuit,
in *Actis Eruditorum Lipsiensibus*, anno 1686, cum
publico communicasset, magnam illico ea res in orbe
mathematico controversiam excitavit.

Novam itaque istam doctrinam cum plures certatim
aggrederentur, vix autem quisquam amplecteretur
e mathematicis celebrioribus, anno 1695. mense
Aprili, eandem auctor edito *Specimine Dynamico*
confirmare conatus est. Ubi, inter alia multa, hæc
habet :

“ Porro ad veram virium æstimationem, & quidem
“ prorsus eandem, diversissimis itineribus perveni :
“ uno quidem a priori, ex simplicissima consideratione
“ spatii, temporis, & actionis (quod alias exponam)
“ altero a posteriori, vim scilicet æstimando ab ef-
“ fectu quem producit se consumendo.”

Videbatur autem in animo habere vir clarissimus
viam illam a priori, quam se *alias expositurum* hic
promittebat, mense *Majo* sequente in publicum edere,
cum sub finem *Speciminis* hujus *Dynamici* hæc verba
addiderit :

“ Sed nunc fugatis erroribus, veras & sane admi-
“ randas naturæ leges paulo distinctius in Schediasma-
“ tis hujus parte secunda proponemus mense *Majo*
“ exhibenda.”

O

Atqui,

Atqui, quod magnopere dolendum, secunda illa pars neque mense *Majo*, neque ullo ex sequentibus aut mensibus aut annis, etsi plus quam viginti annos supervixerit *Leibnitius*, aut in *Actis Lipsiensibus*, aut alibi uspiam in publico comparuit.

Sed ne quis forte putet promissum istud idcirco non fuisse præstitum, quod fidei suæ liberandæ non esset magnus ille vir, factum est edito novissime *Commercio Literarum* inter ipsum *Leibnitium*, & alterum illum celeberrimum mathematicum, *Johannem Bernoullium*.

Bernoullius nempe, viso eo *Specimine Dynamico*, literis ad *Leibnitium* datis mense *Junio* sequenti, quædam laudavit, sed virium æstimationem *Leibnitianam* adeo non probavit, ut etiam conaretur demonstrare vires corporum motorum, non quadratis celeritatum, sed ipsis celeritatibus esse proportionales.

Tandem vero re per literas ultro citroque datas diligentius excussa, prorsus in *Leibnitii* castra transivit *Bernoullius*.

Is ergo, tanti discipuli docilitatem remunerari certus, communicat argumentum a priori ductum, quod hactenus apud se prefferat, simulque causam docet quare id prius non vulgaverit.

“ Noli, (a) inquit, illos dignari hac liquida luce
 “ veritatis, qui argumenta illa, ab affectibus gravium
 “ vel aliorum corporum sensibilibum petita, non ut
 “ par est acceperunt; unde nec publice extare volui; ut
 “ esset quod illis communicarem, qui sese æquos judices præbuisserent.”

Bernoullius

(a) Mense *Januario*, 1696.

Bernoullius. itaque, cum *seſe æquum judicem præbuiſſet*, & argumenta illa a poſteriori, *uti par erat*, *accepiſſet*, hoc eſt, deſcendiſſet prorſus in ſententiam *Leibnitianam*, dignus utique habitus eſt, qui in interiora illa ſcientiæ adyta admitteretur.

“ Quoniam, (a) inquit auctor, te in noſtris caſtris
 “ video, lubenter communicabo principium meum a
 “ priori demonſtrandæ veræ æſtimationis virium;
 “ quod mihi in promptu eſſe aliquoties indicavi, non-
 “ dum tamen hætenus produxi. Tibi enim commu-
 “ nicare eſt frugiferæ maxime terræ commendare
 “ granum, ut in magnam plantam furgat.”

Laudo ſane, quod *granum* iſtum *terræ* tam *frugi-feræ commendaverit* vir optimus, & tamen ejus conſilium non omni videtur reprehensione caruiſſe. Nam eſſi *Papinos*, *Catelanos*, reliquosque ſuæ doctrinæ opugnatores, apud quos, propter incredulitatem, nihil magni poterat efficere, qui *inconvertibiles quantifcunque demonſtrationibus viderentur*, ſi illos, inquam, *hæc liquida luce veritatis* indignos judicaret, cur tamen illam reliquo orbi literato invideret? Mitto dicere, quod viri boni & humani, & incrementi ſcientiarum ſtudioſi erat, rem tanti momenti omnibus patefacere. Quod ſi omnibus aliis rebus poſſhabitis, gloriæ tantum ſuæ conſulere libuiſſet, hoc erat faciendum, quo factò obrectatores iſti aut illico ad ſilentium reſacti, aut ab omnibus fuiſſent condemnati. Denique cum non ſibi ſolum, nec uni alterive amico, ſed omnibus, nati ſint magni viri, quæ iſta eſt iniquitas, velle *Johannem Bernoullium*, & diſcipulos *Bernoullianos*, ea luce
 liquida

(a) Menſe *Januario*, 1696

liquida frui solos, cum interim nos alii homunciones ætatem degeremus in tenebris plusquam *Cimmeriis*? Sed bene habet, quod post quinquaginta annos tenebrarum lux illa jam omnibus illucescit.

“ Ecce Argumentum.

“ Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla,
“ virtualiter actionis facientis idem duplum tempore
“ duplo; seu percursio duorum milliarium, intra ho-
“ ram, est dupla (virtualiter) percursionis duorum
“ milliarium, intra duas horas.

“ 2°. Actio faciens duplum, tempore duplo, est
“ dupla, formaliter, actionis facientis simplum tem-
“ pore simplo; seu percursio duorum milliarium,
“ intra duas horas, est dupla (formaliter) percursionis
“ unius milliaris, intra unam horam.

“ 3°. Ergo actio faciens duplum tempore simplo
“ est quadrupla actionis facientis simplum tempore
“ simplo; seu percursio duorum milliarium, intra
“ unam horam, est quadrupla percursionis unius mil-
“ liaris, intra unam horam.

“ 4°. Si pro duplo substituissimus triplum, qua-
“ druplum, quintuplum, &c. prodiiisset actio noncu-
“ pla, sedecupla, 25pla; & generaliter patet actiones
“ motrices æquabiles, æquitemporaneas, æqualium
“ mobilium, esse ut quadrata celeritatum; vel, quod
“ idem est, in eodem, vel æquali corpore, vires esse
“ in duplicata ratione celeritatum. Q. E. D.”

Perlecto hoc argumento, & ob magnam auctoris famam attentissime considerato, ego, ut verum fatear, ne scintillam quidem veritatis, aut etiam sensus communis, ibi potui animadvertere. Suspicerer fane id oculorum meorum vitio fieri, qui forte in nimia luce cæcutirent,

cæcutirent, nisi animos addidisset ipsius *Bernoullii* dubitatio.

Vir ille acutissimus *liquide* isti *veritatis luci* adeo non acquievit, ut in literis suis responsoriis non solum objectionem moverit, sed etiam demonstrationem, & quidem duplicem, in contrarium produxerit.

“ Non video, (a) inquit, quid ab adversario in
“ contrarium dici possit; nisi forte quod actio virtua-
“ lis confundi videatur cum actione formali; negando
“ scilicet consequi *A* esse quadruplum ipsius *C*, ex
“ eo quod *A* sit dupla ipsius *B*, virtualiter, & *B* dupla
“ ipsius *C*, formaliter.”

Hac proposita objectionem, subjungit deinde suas demonstrationes.

“ 1°. Actio faciens duplum tempore simplo est
“ dupla virtualiter actionis facientis idem duplum
“ tempore duplo.”

“ 2°. Actio faciens duplum tempore duplo est
“ simpla virtualiter actionis facientis simplum tem-
“ pore simplo.

“ 3°. Ergo actio faciens duplum tempore simplo,
“ est dupla actionis facientis simplum tempore sim-
“ plo. Vel scilicet,

“ 1°. Actio faciens duplum tempore simplo est
“ simpla formaliter actionis facientis idem duplum
“ tempore duplo.

“ 2°. Actio faciens duplum tempore duplo, est
“ dupla formaliter actionis facientis simplum tempore
“ simplo.

“ 3°.

“ 3°. Ergo actio faciens duplum tempore simplo,
“ est dupla actionis facientis simpliciter tempore simplo.

“ Vides duo argumenta, quæ idem plane conclu-
“ dunt, sed tuæ conclusioni omnino contrarium, & vul-
“ gari illo nituntur axioma, quæ eadem sunt æqualia
“ sunt inter se æqualia; quod quidem tantummodo
“ locum habet in quantitatibus homogeneis, ut hic
“ comparando actionem virtuales cum virtuali, &
“ formalem cum formali, non autem illam cum hac.”

Hæc *Bernoullius* acumine non minori, quam mo-
destia. *Leibnitius* vero literis mense *Martio* datis, primo
loco objectionem *Bernoullianam* diluere conatur.

“ Satis non video, inquit, quid tibi velis, cum
“ dicis actionem virtuales confundi cum formali.
“ Non enim actio mihi hic est virtualis vel formalis;
“ sed una actio alterius est dupla, vel virtualiter, vel for-
“ maliter. Nimirum virtualiter, cum dupla est æstima-
“ tione, etsi non sit dupla mole, vel congruentia, ut du-
“ catus est duplus thaleri: Formaliter vero, ut thalerus
“ duplum est semithaleri. Et sciendum est quod
“ duplum est formaliter, id etiam virtute seu æstima-
“ tione esse duplum. Ideo cum nonnisi de virtute,
“ seu æstimatione, hic quaratur, nulla est confusio
“ diversi generis quantitatum vel æstimationum;
“ nempe virtualiter duplum intelligo quod tale est
“ virtualiter solum; sed formaliter duplum voco,
“ quod simul & formaliter & virtualiter duplum est.”

Non diffidendum sane quod suo jure utitur *Leib-
nitius*, tribuendo eum quem velit sensum vocibus a
se usurpatis, quodque hoc pacto plane diluit objec-
tionem *Bernoullianam*. Id unum vellem clare ex-
posuisset, vel ultro, vel postulante *Bernoullio*, qua
virtute, vel qua æstimatione, actio faciens duplum

tempore simplo sit dupla actionis facientis idem duplum tempore duplo. Id enim, nisi me admodum fallit, inter falsissima reponendum est.

Pergit vir cl. "Poteram vocabulis (tantum harmoniæ cujusdam causa adjectis) abstinere; ut enim quia ducatus duplus est thaleri, & thalerus semithaleri, concludo ducatum semithaleri quadruplum esse; ita quia percursio 2 milliarium, una hora, dupla est percursionis 2 milliarium, 2 horis, & percursio 2 milliarium, 2 horis, dupla est percursionis unius milliaris, una hora; sequetur percursionem 2 milliarium una hora esse quadruplum percursionis unius milliaris, una hora."

Sublatis jam turbatricibus istis vocibus, *virtualiter*, & *formaliter*, quæ limpidum hunc veritatis fontem hactenus coinquinaverant, non modo sustulit *Leibnitius* objectionem a *Bernoullio* propositum, sed cum penitus ad suas partes pertraxit. "Tua responsio (inquit ille in proximis literis) mihi nunc plane satisfacit; video enim, quid duo isti termini tibi significant: cæterum argumentatio tua mihi videtur elegantissima, & publico non amplius invidenda; multum enim ponderis tribuet argumentis a posteriori."

Hæc *Bernoullius* in literis mense *Aprili* datis, & ego quidem eidem argumento pariter acquiescerem, si quis mihi monstraret æque clarum esse percursionem 2 milliarium, una hora, duplam esse percursionis 2 milliarium 2 horis, atque clarum est ducatum esse duplum thaleri. Video enim duplo velociorem esse percursionem 2 milliarium, una hora, percursione 2 milliarium, 2 horis: duplam esse non video, sed æqualem, cum idem spatium utraque percursione conficiatur.

Sed forte rem ulterius urgere noluit idcirco *Bernoullius*, quod solito commotiorem sese ostendisset *Leibnitius*. “Ego, (a) inquit ille, nihil magni promittere ausim; sperabam tamen reus non fieri paralogismi apertissimi, in argumentatione, non obiter elapsa, sed a compluribus annis considerata, quam tamen alicujus momenti venditaram.” Cujus tamen *apertissimi paralogismi Leibnitium* apertissime reum esse, nos, ni animus multum fallit, infra ostendemus.

Demonstrationis utriusque *Bernoullii* examinationi *Leibnitianæ* non opus est immorari, quod pendeat utraque demonstratio ex sensu vocum, *virtualiter*, & *formaliter*, secus accepto quam vellet *Leibnitius*. “Eos, (b) inquit *Bernoullius*, sumebam terminos alio sensu quam eo quo nunc eos explicas.”

Leibnitius vero, incertus adhuc quid ponderis habitura esset apud *Bernoullium* prima sua demonstratio, alteram eidem subjungit. “Aliam, (c) inquit, addo, quæ, si fundum rei spectes, redit in priorem, habet tamen suum proprium pondus. Actiones motrices (æquabiles intelligo) ejusdem mobilis sunt in ratione composita effectuum immediatorum, nempe longitudinum percursarum, & velocitatum. Porro longitudo (æquabiliter percursæ) sunt in ratione composita temporum & velocitatum. Ergo actiones motrices sunt in ratione composita ex simplice temporum & duplicata velocitatum; ideoque iisdem temporibus, vel temporum elementis, actiones motrices ejusdem mobilis sunt in ratione duplicata velocitatum, vel, si diversa sint mobilia, in ratione
“ composita

(a) Mart. 1696.

(b) Apr. 1696.

(c) Mart. 1696.

[III]

“ composita ex simplice mobilium & duplicata velocitatum.”

Bernoullius in literis mense *Aprili* ad *Leibnitium* datis, cum sese priori demonstrationi acquiescere dixisset, de posteriore autem ne verbum quidem faceret, quæsit ex eo *Leibnitius* mense *Majo*, “ quid illi videretur de altera ejusdem propositionis demonstratione. Quæ (inquit) paulo “ magis est ad formam receptam, etsi ambæ conveniant in radice.”

Bernoullius itaque, cum jam effugere non posset, quin mentem suam aperiret, in literis mense *Junio* datis hæc habet.

“ Altera tua demonstratio propositionis de ratione actionum motricium, quam in prioribus allegasti, ingeniose pariter ac prior, & ut dicis, “ magis ad formam excogitata mihi videtur, quamvis in fundo rei ambæ coincident. Nihil etiam “ enim mihi certius est, quam quod actiones motrices debeant mensurari per effectus suos immediatos; si itaque longitudines percursæ, & velocitates “ (nisi quis obstinate vellet velocitatem potius esse causam) sint effectus actionis immediati, & quidem “ soli, quorum unum ab altero non dependet, vel “ in altero non includitur, erunt actiones motrices “ necessario in ratione composita longitudinum & “ velocitatum; adeoque temporibus æqualibus in duplicata velocitatum.”

Patet *Bernoullium* hoc responso demonstrationem illam alteram *Leibnitianam* specie quidem probare, reipsa, quamvis cum summa cautione & modestia, damnare. Nec enim solum subinnuit velocitatem esse causam potius, quam effectum actionis, sed assensum suum ea conditione astringit, ut effectuum

a *Leibnitio* positorum, nempe longitudinis percursæ & velocitatis, unus ab altero non dependeat, vel in altero non includatur. Cum igitur sit evidentissimum, pendere longitudinem percursam a velocitate, & in illa includi, patet istam demonstrationem vitiosam esse iudice *Bernoullio*.

Leibnitius proximis literis mense *Junio* datis, cum ad alia plura copiose & distincte responderet, ad tacitas hæc objectiones *Bernoullianas*, dissimulata earum vi, quasi aliud agens, hoc unum reposuit.

“ Cæterum, ut actionem nunc, composita ratione
 “ suorum principiorum, potentiæ & temporis, æstimo;
 “ ita eam paulo ante æstimaveram composita ratione
 “ eorum quæ præstat; effectus scilicet extensivi seu
 “ materialis, nempe longitudinis (quem κατ’ ἐξοχήν
 “ effectum vocare soleo) & effectus intensivi seu for-
 “ malis. Desideratum enim est, ut præstetur multum
 “ & cito. Ambæ autem æstimationes consentiunt
 “ inter se, ut vides.”

Per obscuritatem hujus responsi, sive affectatam, sive *Leibnitio* naturalem, facile cernitur eum velle ut velocitas pro effectû actionis habeatur, quam *Bernoullius* pro causâ potius habendam subinnuerat, non audere tamen eam diserte nominare, licet eam intelligat sub nomine effectus intensivi seu formalis, quem præstet actio. Porro de altera objectione *Bernoulliana*, nimirum, quod etiamsi velocitas vel maxime sit effectus actionis, pariter atque longitudo percursæ, tamen cum alter horum effectuum ab altero dependeat, vel in altero includatur, et certe pendet longitudo percursæ a velocitate, actio mensurari non debeat per effectus istos, de hac, inquam, altum hic silentium.

Actum itaque videtur de altera illa demonstratione, *Leibnitio* ipso iudice, pariter atque *Bernoullio*; & sane in

in sequentibus eorum literis ne minimam quidem ejus mentionem factam reperio.

Porro, prior illa demonstratio, quæ eodem recidit cum posteriori, vera scilicet cum falsa, non videtur omni scrupulo caruisse, neque apud *Bernoullium*, neque apud ipsum *Leibnitium*.

Bernoullius enim, etsi mense *Aprili* professus sit eam sibi *plane satisfacere, eique acquieverit, elegantissimam* vocaverit, & *publico non amplius invidendam*, tamen *Augusto* mense nescivit quid sibi vellet *Leibnitius* per vocem *actionis*, ex qua pendet tota illa demonstratio. "Oportet, inquit, ut definias quid "per actionem intelligas; alias nihil unquam de-
"monstrari poterit." Æquum sane monebat, frustra tamen; nam in literis *Leibnitii* responsoriis, utut satis prolixis, ne *quid* quidem videas de illa definitione tantopere necessaria.

Leibnitius autem ipse, in literis mense *Junio* datis, hæc habet: "Mea demonstratio a priori, pro nostra "virium æstimatione, nititur utique aliqua suppositione. "Nempe, *Actionem quæ facit aliquid uniformiter, "tempore simplo, esse duplam actionis facientis idem "uniformiter, tempore duplo.* Hanc suppositionem "concedere debent *Catelanus*, & alii, cum quibus disputaveram." Quid si nolint? Corruit ergo demonstratio, quæ nititur hac suppositione, saltem nisi suppositionem istam prius demonstres.

At "Nondum quidem inveni modum a priori hanc "propositionem demonstrandi per viam congruentiæ; "imo, ne hanc quidem, quod *actio idem faciens, "breviori tempore, sit major; a quo esset incipien-*
"dum."

Itaque cum tantopere deprædicata illa demonstratio a priori indigeret alia demonstratione, quam nondum invenerat *Leibnitius*, nec unquam postea invenit, nec inventurus est quisquam mortalium, minime mirandum *gratum* istud, utut *frugifera maxime terræ commendatum, in plantam non surrexisse*. *Bernoullius* quippe *liquida* isti *veritatis luci*, cum cerneret dilapsam in cineres facem, longum vale dixit.

At illo longe animosior vir celeberrimus, *Chr. Wolfius*, theoriam virium a priori, geometrarum more, pertractare aggressus, eam, in primo tomo *Commentariorum Academiae Imperialis Petropolitanae*, cum publico communicavit, sub titulo *Principiorum Dynamicorum*. Hujus partem “ cum anno 1710. cum Illustissimo Comite ab Herberstein, Illustri Leibnitio, atque aliis communicasset, eam Leibnitius in suam cum viris celeberrimis Johanne Bernoullio atque Jacobo Hermanno aliisque communicatam, recidere scripsit anno 1711. datis literis dicto fidem his verbis faciens : Calculum virium purarum seu actionum talem instituo. Sit spatium s , tempus t , velocitas v , corpus c , effectus e , potentia p , actio a . In motu æquali erit tv ut s , e ut cs , tp ut a . Atque hæc quidem sine demonstratione assumi possunt. Accedit, quod demonstrandum, ev ut a . Hinc porro plurima theoremata demonstrari possunt, *e.gr.* p ut cv^2 . Nam tp ut ev : sed e ut cs , & s ut tv . Ergo fit tp ut ctv^2 , seu p ut cv^2 . Atque in his con- tinctur pars meorum Dynamicorum, abstracta maxime a rebus sensibilibus, etsi deinde per experientia verificetur.” “ Nullus itaque dubito (inquit *Cl. Wolfius*) me hic principia Dynamicæ menti *Leibnitii* conformia proposuisse.”

Atque

Atque hoc quidem per se clarum est, cum theoremata *Wolfana* cum notulis algebraicis *Leibnitii* adamussim convenient; utrum vero veritati, pariter atque menti *Leibnitii*, conformia sint ea principia, operæ pretium est examinare. Cæterum istud præcipue dignum notatu in hisce notulis reperio, *a* ut *ev*, quod demonstrandum: unde videtur *Leibnitius*, ne tum quidem, post 16 annos elapsos, invenisse demonstrationem suppositionis olim *Bernoullio* venditatae; nempe, quod actio faciens aliquid, tempore simplo, dupla est actionis facientis idem tempore duplo, cum actio faciens aliquid tempore simplo duplo velocius id faciat, quam actio idem faciens tempore duplo. Quomodo autem illud demonstret *Wolffius*, mox examinabimus.

Nos enim, cum illustrissima academia scientiarum imperialis *Petropolitana* tres priores suorum commentariorum tomos dono mittere dignata esset, & simul significandum curasset non ingratum sibi fore, si aliquid subinde ex cogitatis nostris, commentariis inferendum communicare vellemus, jam uno scripto misso, quod ad nostram tuborum capillarium actionis theoriam pertinebat, eoque benigne ab illustrissima academia excepto, & in commentariis publicato, brevi post tempore aliud eidem obtulimus sub titulo *Principiorum Dynamicorum*.

Quod enim videbam celeberrimum *Wolffum* ea jam clare, & distincte, & in morem geometricum explicata proponere, quæ ab ipso *Leibnitio* minus perspicue erant tradita, quam ut facile cerneretur, quid veri inesset, aut falsi; & tamen in summa rerum alteri cum altero adamussim convenire; occasionem arripere visum est illius theoriæ ad examen accuratum revocandæ.

Hunc in finem ea omnia, quæ putabam recte tradidisse *Wolsum*, ad verbum exscripta, *Principiis* meis *Dynamicis* inserui; quæ decrant, supplevi; quæ falsa videbantur, correxi, atque id scriptum 12 abhinc annis, ea qua par erat observantia imperiali academia obtuli.

Lectum id scriptum in publico conventu, eoque nomine grates agi mihi jussisse academiam, ex literis clarissimi *Mulleri*, tunc temporis *Petropoli* abiturientis ad expeditionem *Kamkatschianam*, intellexi.

Postea vero, cum per tot annos nullam illius scripti mentionem fieri viderem in commentariis, tandem anno superiore per amicum, quid eo factum esset, quæsi. Is mihi primo respondit nullum ejusmodi scriptum ad academiam pervenisse. Rescripsi, rite fuisse traditum, lectumque in publico conventu, mense *Junio* anni 1733, gratesque eo nomine mihi actas. Tum demum inspecto protocollo academico, id verum esse repertum est, scriptum vero ipsum nullibi comparuit, nec sciebat quisquam quo casu intercidisset. Potestatem vero mihi fecit illustrissima academia, novum, si vellem, exemplar *Petropolin* mittendi, commentariis inferendum; vel, si id mallet, in actis nostris philosophicis publicandi.

Excussis itaque meis scriniis, exemplar perfectum istius scripti nullibi reperiebam, sive quod aliquo casu intercidisset in domicilio bis mutando, sive quod unum istud confectum esset quod miseram *Petropolin*. Imperfectum vero exemplar reperi, quod, ut potui, supplevi, jamque meliori, spero, fato, Societati Regiæ *Londinensi* dono, dedicoque.

PRINCIPIA DYNAMICA.

Accidere non raro cernitur inter litigantes, ut res a principio satis facilis & expedita, malitia tamen patronorum per omnes legum ambages & laqueos altercantium, in difficillimam tandem & pene inextricabilem abeat controversiam. Tunc autem, si quis jurisconsultus viam aliquam brevem & claram ostenderit, qua res ad exitum perducı queat, videtur is mihi de utraque parte non pessime mereri, sive justiore, sive etiam sequiorem causam tueri, eidem contigerit.

Talem judico sese prastitisse celeberrimum *Christianum Wolfium* in illa controversia de vi motrice, quæ jam a multis annis orbem eruditum occupavit. Is enim, si ipse verum non sit assecutus, rationem certe monstravit, qua alii ad verum & tuto & facile pervenire possint.

Hujus itaque, & illustrissimi *Leibnitii*, quem is se ducem sequi profitetur, vestigiis insilens *Principia Dynamica*, ut ipsorum verbo utar, quam fieri potest perspicue, exponere conabor.

Quem in finem non nisi casum simplicissimum considerare decrevi, corporis vi viva præditi, quod movetur motu uniformi, *h. e.* sine omni impedimento sive medii resistentis, sive corporum quorumcunque oppositorum, plane secundum positiones *Wolfianas*. De quo clarissimo viro si me tum definitiones & axiomata, tum ipsas propositiones sequentes, præter unam aut alteram, & earum demonstrationes, ne verbo quidem mutato, sumpsisse mutuo animadvertat lector ingenuus, sciat ille velim me id consulto fecisse, quod eas neque clarius enuntiari posse existimem, neque certius demonstrari.

Definitio

Definitio 1.

“ *Vim vivam* cum *Leibnitio*, vel etiam simpliciter *vim* appello, quæ motui locali adhæret.

Definitio 2.

“ *Vis pura* est, cui in agendo contraria nulla resistit.”

Corollarium.

“ *Vis* igitur *pura* toto actionis tempore invariata manet.”

Scholion.

“ Istiusmodi *vis* in motu æquabili sese exerit, si concipiatur fieri in medio non resistente. Quantumcunque enim intervallo mobile promoveatur, eadem tamen semper subsistit celeritas, consequenter *vis* motrix eadem. Effectus adeo, quem producit, eam minime absorbet.”

Definitio 3.

“ *Actio pura* dicitur, quæ exercetur vi motrice *pura*.”

Scholion.

“ Talis est *actio* mobilis motu æquabili lati in medio non resistente.”

Definitio 4.

“ *Actio* uniformis est, quæ duplo tempore dupla, triplo tripla, & ita porro, seu in genere, quæ est ut tempus.”

Scholion.

“ Istiusmodi *actio* in motu æquabili locum habet, ubi mobile continuo eadem celeritate moveri pergit, si nempe motus fieri concipitur in medio non resistente.”

Definitio

Definitio 5.

“ *Effectus vis motricis extra conflictum* est translatio
“ mobilis per spatium.”

Axioma 1.

“ Si duo, vel plura mobilia æqualia æquali celeritate moveantur, vis eorundem eadem est.”

Axioma 2.

“ Eadem vi eodem tempore eadem absolvitur
“ actio.”

Scholion.

“ Eadem vi longiori tempore majorem absolvi
“ actionem quam breviori, & contra eodem tempore
“ vi majore actionem majorem absolvi quam minori,
“ nemo dubitat. Quantitas adeo actionis pendet a
“ quantitate virium & temporis. Quamobrem, si vires
“ fuerint æquales, & tempus idem, actio quoque eadem
“ esse debet.”

Axioma 3.

“ Si idem mobile per idem spatium transfertur,
“ effectus idem est.”

Scholion.

“ Supponimus nempe motum fieri in medio non
“ resistente, aut saltem abstrahimus ab actione, quæ
“ impenditur in superandam resistantiam medii: id
“ quod licet, quamdiu temporis nulla habetur ratio,
“ quo effectus producitur.”

Theorema 1.

“ Si corpora inæqualia eadem celeritate moventur,
“ vires sunt ut massæ.”

Demonstrationes hujus, & sequentium octo theorematum, circa quæ nulla nobis cum *Leibnitianis* est contro-

versâ, in scripto *Petropolin* misso posueramus verbis *Wolfianis*: hic autem ad evitandam prolixitatem, omit-
tendas censuimus.

Theorema 2.

“ Actiones uniformes eodem tempore absolutæ
“ sunt inter se ut vires.”

Theorema 3.

“ Actiones uniformes, viribus æqualibus absolutæ,
“ sunt inter se, ut tempora quibus absolvuntur.”

Theorema 4.

“ Actiones uniformes sunt in ratione composita
“ temporum & virium.”

Theorema 5.

“ Vires inæquales eandem actionem absolvunt tem-
“ poribus sibi reciproce proportionalibus.”

Theorema 6.

“ Si duo mobilia æqualia per spatia inæqualia transf-
“ feruntur, effectus sunt ut spatia.”

Theorema 7.

“ Si duo quæcunque mobilia per idem spatium
“ transferuntur, effectus sunt inter se ut massæ eo-
“ rundem.”

Theorema 8.

“ Si duo quæcunque mobilia per spatia quæcunque
“ transferuntur, effectus sunt in ratione composita
“ massarum atque spatiorum.”

Theorema

Theorema 9.

“ In motu æquabili, effectus sunt in ratione com-
“ posita massarum, celeritatum atque temporum.”

Theorema 10.

“ Actiones, quibus idem effectus producitur, sunt
“ ut celeritates.”

Pervenimus jam ad illud theorema, in quo totius rei cardo vertitur. Si hoc verum est, amplectenda est doctrina *Leibnitiana*; si minus, repudianda. Itaque diligenter examinanda est hujus theorematis demonstratio.

Ea dividitur a *Wolffo* in tres casus; sed cum secundus & tertius a primo pendeat, nos hunc unum considerabimus.

Demonstratio Casus primi.

“ Si mobilia fuerint æqualia, & effectus idem di-
“ versò tempore producat, celeritates erunt ut tem-
“ pora reciproce, quibus is producitur; hoc est, cor-
“ pus, quod tempore $\frac{1}{2}$ T effectum producit, movetur
“ celeritate $2C$, cum alterum, quod effectum tempore
“ T producit, moveatur simplici celeritate C , atque
“ ita porro. Jam evidens est, actionem uniformem
“ esse duplam, quæ dimidio tempore effectum pro-
“ ducit, triplam, quæ subtriplo, & ita porro, &c.”

Ai'n vero, *Wolff*, evidens esse istud? ———
Quid si negem? Quid si dicam actionem, quæ eun-
dem effectum producit, eandem esse, quocunque
tempore eum producat? Hæc est ea ipsa suppositio
Leibnitiana, cujus in literis ad *Bernoullium* datis anno
1695, se nondum ait invenisse modum demonstrandi
a priori; quod in literis ad teipsum datis anno 1711
adhuc demonstrandum ait. Id tamen tu non conaris

demonstrare, sed evidens esse ais. Nego evidens esse, & corrui tua demonstratio, corrui simul ipsa propositio.

Huic autem antequam novam substituamus, dispiendum est paulisper quid per actionem intelligatur, quid per effectum.

Actionis definitionem cl. *Wolffius*, *Leibnitii* exemplo, quod minime factum vellem, omisit. Docuit solum qualis sit actio *pura*, scilicet quæ omni impedimento carcat; & qualis actio *uniformis*, nempe quæ crescat in ratione temporis: quid per actionem ipsam intelligeret, nullibi definivit. Hoc autem nisi fiat, *nihil unquam demonstrari poterit*, quod olim *Leibnitium*, sed incassum, commonecerat *Bernoullius*.

Hunc defectum si ego supplere ausim, quam *Wolffius* definitionem effectus dederit, eandem actioni ipsi tribuerem; quum nihil interesse videatur inter actionem & effectum, nisi quod actio, si ita loqui liceat, sit effectus in fieri, effectus autem sit actio peracta sive absoluta. Scilicet, in exemplo *Wolffiano* id agit vis viva, ut transferat mobile per spatium; ergo actio vis vivæ est *translatio mobilis per spatium*; effectus etiam vis vivæ est *translatio mobilis per spatium*; vel, si mavis, effectus est mobile jam translatum per idem spatium.

Generaliter vero, actio est productio effectus; vel, si mavis, actio est qua quid efficitur: effectus autem est id ipsum quod efficitur.

Nolim sane definitiones istas pro perfectis venditare: sed tamen ejusmodi esse censeo, ut omni careant erroris periculo, præsertim si per exempla aliquot rem planiorem reddiderim.

Si ego paginam unam descriphero, actio mea erit descriptio unius paginæ, & effectus erit pagina una descripta.

Si operarius parietem dealbet, erit ejus actio dealbatio parietis, effectus autem erit paries dealbatus.

Si rusticus hortum perfodiat, actio ejus est horti perfossio, effectus autem est hortus perfossus.

Infinita alia exempla sibi quisque excogitare poterit, & sane pueret rebus tam planis, & quali frivolis, tamdiu immorari, nisi hæc ipsa perperam concepta tot magnos viros in gravissimos errores præcipitassent. Scilicet,

Hæ nugæ seria ducunt

In mala.

Theorema 10 nostrum.

Actionum æqualium æquales sunt Effectus.

Absolvat vis viva quævis *A* actionem quamcunque, & data sit alia quæcunque vis viva *B*. Jam, ut absolvat vis viva *B* actionem æqualem actioni vis vivæ *A*, necesse est tantum præcise agat vis viva *B*, quantum egerit vis viva *A*. Ergo post absolutam actionem ipsius *B*, tantum erit actum vi *B*, quantum actum fuerit vi *A*; h. e. effectus vis vivæ *B* par erit effectui vis vivæ *A*, quarum actiones fuerint æquales. *Q. E. D.*

Theorema 11 nostrum.

Actiones sunt in ratione effectuum.

Demonstratio.

Producatur actione *a* effectus *e*. Ergo alia æquali actione *a*, per *Theor.* 10, produccetur alius effectus *e*, priori æqualis: consequenter, actione bis *a* produccetur
tur

effectus bis *e*. Similiter patet actione ter *a* produci debere effectum ter *e*, &c. Immo in genere, actione *na* ($=A$) produci debere effectum *ne* ($=E$). Est igitur $A:a :: E:e$, hoc est, actiones sunt in ratione effectuum.

Theorema 12 nostrum.

Vires sunt in ratione composita massarum & celeritatum.

Demonstratio.

Per *Theorema* 4. actiones sunt in ratione composita temporum & virium. Per *Theorema* 11, eadem sunt in ratione effectuum. Ergo effectus sunt in ratione composita temporum & virium. At per *Theorema* 8, effectus sunt in ratione composita massarum atque spatiorum. Ergo ratio composita temporum et virium par est rationi compositæ massarum atque spatiorum. Unde vires sunt in ratione composita massarum et spatiorum directe, et temporum reciproce; h. e. in ratione composita massarum et celeritatum. Q. E. D.

V. *An Account of Two extraordinary Deers Horns, found under-ground in different Parts of Yorkshire; in a Letter from Mr. Tho. Knowlton, to Mr. Mark Catesby, F. R. S.*

Read March 13. 1745-6. **T**HE Head and Horns, which is represented in TAB. I. Fig. 2. were found in a Sand-bed, in the River Rye, which runs into the Derwent,